Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду

Шишанину Андрею Олеговичу
не объясняющему нормально электрод
рассказчику баек
и программы каждого курса мехмата и НМУ за 15 мин
стильно одевающимся
и улыбчивому, как Степаньянц
дающему позитивное настроение на весь семинар… да не, на всю неделю

Семинарист: Был такой математик Гротендик, он однажды написал «для всех простых чисел, в частности, 57». Ну, вы поняли. 57 – не простое число. А вообще он был очень странный человек, например, отказался приехать в своё время в Москву на вручение Филдсовской премии, потому что в ту пору арестовали советского математика, Андрея Донатовича Синявского. Я вам рекомендую почитать книгу «Основы советской цивилизации», вам как людям, не жившим в ту пору.

Поставим простейшую задачу электростатики: зная пространственное распределение зарядов $\rho(\mathbf{r_1})$, найти потенциал в произвольной точке.
Эта задача решается очень просто. Найдём вклад от заряда, расположенного в объёме пространства dV в радиус-векторе $\mathbf{r_1}$. Заряд там dq=ρ *dV, зная школьную формулу для потенциала dφ=dq/r, ***по принципу суперпозиции*** запишем вклад в потенциал в точке **r** от заряда, расположенного в точке $\mathbf{r_1}$:

$$d\varphi = \frac{dq}{|\vec{r}_1 - \vec{r}\,|} = \frac{\rho(\vec{r}_1)dV}{|\vec{r}_1 - \vec{r}\,|}$$

А суммарный потенциал в **r** будет равен интегралу от вкладов во всём пространстве

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint\limits_{\text{по } R^3}^{\text{по } R^3} d\varphi$$

Подставим dφ:

$$\varphi(\vec{r}\,) = \iiint\limits_{\text{по } R^3}^{\text{по } R^3} d\varphi = \iiint\limits_{\text{по } R^3}^{\text{по } R^3} \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}\,|} dV(\vec{r}_1)$$

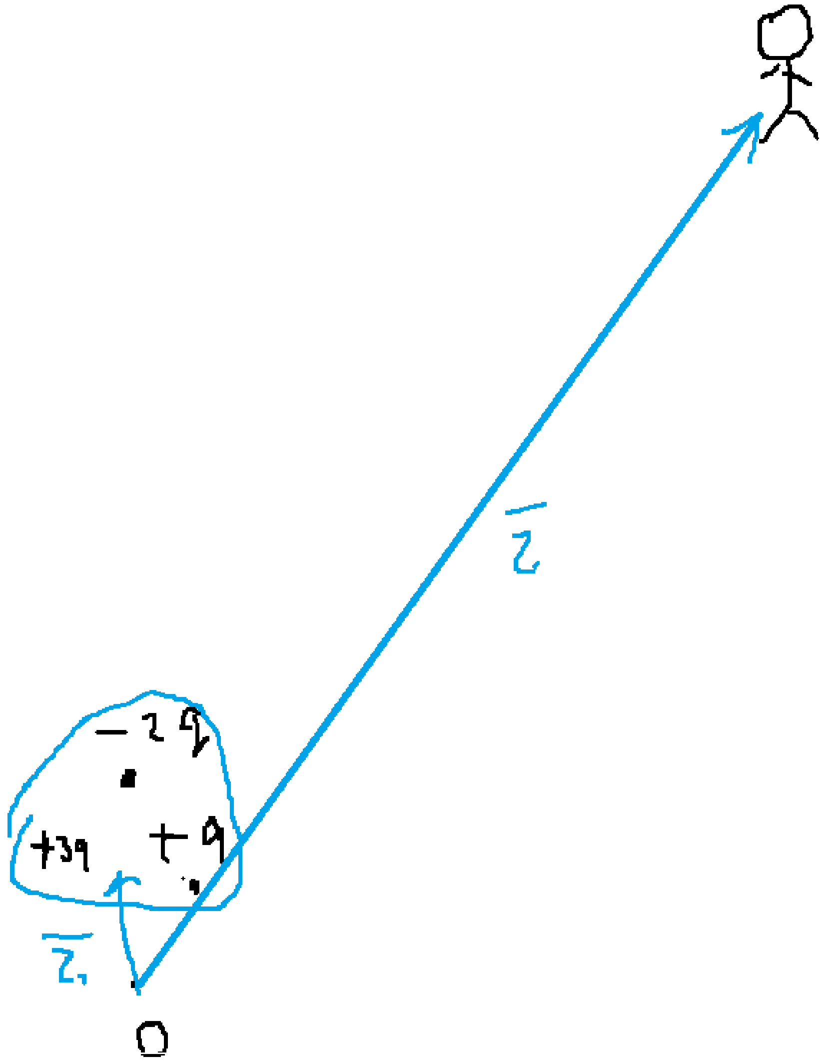
Получили конечный ответ.
Эту формулу некоторые семинаристы и лекторы доказывают через Фурье, решая уравнение Пуассона через функцию Грина. Конечно, ***этого делать не нужно*** – мы получили её тупым следствием формулы для потенциала из закона Кулона с принципом суперпозиции.

Мы только что получили ***точное (!!!)*** решение простейшей задачи электростатики. На практике оказывается, что удобней вот такое вот разложение в ряд из бесконечного числа слагаемых:

$$\frac{1}{r}\left[\iiint_{R^3} \rho(\bar r_1)\, dV(\bar r_1)\right] + \frac{1}{r^3}\left(\bar r \cdot \iiint_{R^3} \rho(\bar r_1)\, \bar r_1\, dV(\bar r_1)\right) + \frac{1}{r^5}\cdot \_\_ + \dots$$

суммарно зарядовое — дипольное — квадрупольное

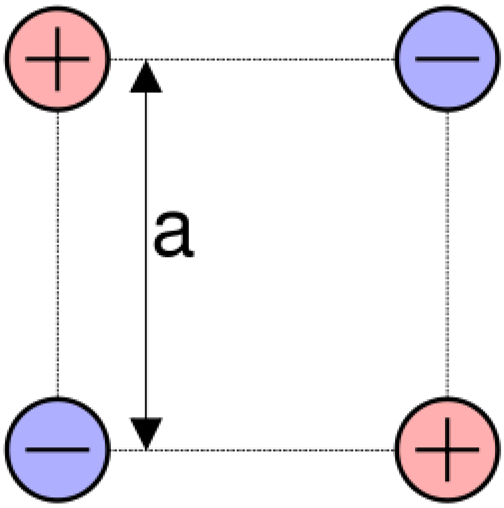
Сразу вопрос: а зачем? Ответ будет дан в этой методе (две причины). А пока заметим, что **процедура разложения потенциала в ряд имеет хоть какой-нибудь смысл, если наблюдатель в точке r расположен достаточно далеко от зарядов (от места, где у нас плотность заряда отлична от нуля).**
Как на рисунке ниже:



Где длина синего отрезка >> размеров синей области с зарядами.
Обсудим физический смысл первого слагаемого – суммарнозарядового.
Мы тупо подсчитали суммарный заряд, а затем поделили его на r. Давайте посмотрим на рисунок. Получим ли мы достаточно правдоподобный ответ?

Давайте посмотрим на рисунок. В целом да: наблюдатель находится достаточно далеко от тусы зарядов => можно пренебречь тем фактом, что заряды находятся на разном расстоянии от наблюдателя => в первом приближении вместо подсчёта начального точного интеграла (но который нам было бы считать очень сложно) мы можем взять именно суммарнозарядовое слагаемое. Это первая причина: если нам нужно ответ прикинуть, а не точно подсчитать до 35-го знака после запятой, и наблюдатель находится достаточно далеко от тусы зарядов, можно не считать интеграл, а тупо взять в качестве ответа очень лёгкое первое слагаемое.
Но если мы захотим сделать ответ поточнее, нам потребуется уже дипольное слагаемое. Выражение под интегралом в дипольном слагаемом - это в точности дипольный момент из элмага. А следующая поправка будет уже квадрупольное приближение. Это тема следующего семинара и следуюзей методички.

Сообразите ещё такую вещь: если суммарный заряд 0, то суммарнозарядовое слагаемое обнуляется, и в потенциале главную роль начинает играть дипольное. Это случай, когда суммарный заряд 0. Например, это и два заряда +q и –q напротив друга, и любой неионизированный атом.
Поэтому это слагаемое и называется дипольным – для систем, где суммарный заряд 0 (в частности, диполей - два заряда +q и –q напротив друга), именно оно играет главную роль.
Есть системы, где обнулится и дипольное слагаемое, и на первый план выйдет квадрупольное. Наиболее простой пример – это вот такой квадрат, который называется квадруполь:



У него равен нулю и суммарный заряд, и дипольный момент.

Теперь про вторую причину, почему разложение в ряд – это круто. И суммарный заряд, и дипольный момент, и квадрупольный момент не зависят от расположения наблюдателя, а зависят только от распределения зарядов.
Т.е. мы можем взять нашу систему с зарядами, подсчитать для неё:
1) суммарный заряд q
2) дипольный момент **d**
3) квадрупольный момент (поговорим позже, как он обозначается)

И т.д.
А затем, чтобы найти потенциал где-нибудь далеко от этой системы, тупо подставить всё это дело в ряд

$$\frac{1}{r}\underbrace{\boxed{\left[\iiint_{R^3} \rho(\bar r_1)\, dV(\bar r_1)\right]}}_{q} + \frac{1}{r^3}\left(\underbrace{\boxed{\bar r \cdot \iiint_{R^3} \rho(\bar r_1)\, \bar r_1\, dV(\bar r_1)}}_{\vec d}\right) + \frac{1}{r^5}\cdot \_\_ + \dots$$

и получить изящную формулу

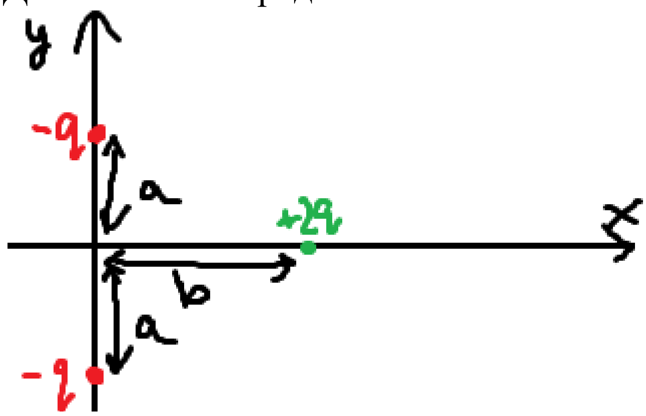
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{r} + \frac{(\boldsymbol{rd})}{r^3} + \cdots$$

где все эти характеристики зарядовой системы просто поделятся на r в какой-то степени и домножатся на какие-то коэффициенты. На самом деле в реальности роль играют первые 1-2 ненулевых слагаемых, а остальными пренебрегают.

Решим для закрепления задачи. Все задачи 3 семинара из задачника малосодержательны, поэтому решим мои задачи.

Задача 1.

Дана система зарядов:



Найти φ(**r**) на больших расстояниях с точностью до дипольного слагаемого включительно.

Решение. Суммарный заряд равен 0, поэтому суммарнозарядового слагаемого нет. Значит, будет только квадрупольное:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{(\boldsymbol{rd})}{r^3}$$

Осталось найти дипольный момент **d**. Давайте действовать по алгоритму нахождения дипольного момента:

1) Каждый заряд q в точке (x,y,z) создаёт дипольный момент (qx,qy,qz)

2) Дипольный момент суммы зарядов есть сумма дипольных моментов от каждого заряда.

Поэтому дипольные моменты от зарядов будут

(0,-qa,0)

(0,qa,0)

(2qb,0,0)

Суммарный будет (2qb,0,0), т.е. $2qb\boldsymbol{e_x}$

Тогда

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{(\boldsymbol{rd})}{r^3} = \frac{2qbx}{r^3}$$

Где x – абсцисса точки наблюдения. Ответ можно записать и так:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{2qbx}{r^3} = \frac{2qbx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Задача 2.

Найти полный заряд дипольный момент заряженного плоского диска радиусом R. Поверхностная плотность зарядов $\rho_l(r,\varphi) = Arcos\varphi$.

Решение.

Заряд ищется как интеграл от линейной/поверхностной/объёмной плотности. В данном случае поверхностной:

$$q = \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\varphi * \rho_l = \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\varphi * Arcos\varphi = 0$$

Дипольный момент считается почти так же, только домножаясь на x или y:

$$d_x = \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\varphi * \rho_l\, x = \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\varphi * Arcos\varphi * rcos\varphi$$

$$d_y = \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\varphi * \rho_l\, y = \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\varphi * Arcos\varphi * rsin\varphi$$

Досчитайте уж интегралы сами.